Algorithmes d'optimisation

Exercice 1. Algorithme du simplexe

Résoudre par l'algorithme du simplexe le programme linéaire

$$\begin{array}{cc} \min & 3x_3 - x_4. \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 = 6 & \\ x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 4 & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

Exercice 2. Programme linéaire et dualité

Soit A une matrice comportant m lignes et n colonnes. Soit $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de minimisation

$$\begin{array}{cc} \inf & c.v \\ v \geq 0 & \\ Av = b & \end{array} \qquad \text{(P)}$$

2.1 - Introduire le Lagrangien associé au problème de minimisation (P) et montrer que le problème dual d'écrit

$$\begin{array}{cc} \sup & p.b \\ A^*p - c \leq 0 & \end{array} \qquad \text{(DP)}$$

2.2 - Soit p la solution du problème dual (DP). De quel problème dépendant de p le vecteur u, donné par (P), est-il solution ?

2.3 - Résoudre par dualité le programme linéaire

$$\begin{array}{cc} \min & 8x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 1 & \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

On calculera la solution en s'appuyant sur une étude graphique rapide.

Exercice 3. Minimisation par relaxation

On considère le problème $\min_{u\in K} J(u)$, où la fonctionnelle J est C^1, strictement convexe dans $\mathbb{R}^p$, infinie à l'infini et K est un convexe factorisable, c'est à dire qu'il existe a_i, $b_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ tels que $a_i < b_i$,

$$K = \overline{\Pi_{i=1}^p]a_i, b_i[} \subset \mathbb{R}^p.$$

On pose $u = (u_1, .., u_p)$. On s'intéresse à l'algorithme de relaxation, $u^0 \in K$ est arbitraire, et $u^{n+1} = T(u^n)$ où T est l'application de K dans K qui à tout $u \in K$ associe $v = T(u)$ défini par

$$J(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_p) \qquad (1)$$

$$\leq J(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, u_{i+1}, \dots, u_p),$$

pour tout indice i et tout $w \in K$.

3.1 - Montrer que l'algorithme est bien défini. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $v \in K$ soit tel que $v = T(u)$.

3.2 - Soit x_n une suite d'éléments d'un espace vectoriel V tel qu'il existe $x \in V$, tel que de toute suite extraite de x_n, on peut extraire une nouvelle sous-suite convergeant vers x. Montrer que la suite x_n converge globalement vers x.

3.3 - Montrer que l'application T est continue.

3.4 - Montrer que si $J(u) = J(T(u))$, alors $u = T(u)$ et u est le minimiseur de J sur K.

3.5 - Montrer que l'algorithme défini par (1) converge vers le minimiseur de J sur K.

3.6 - On prend $K = \mathbb{R}^2$ et $J(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + |x_1 - x_2| - (x_1 + x_2)$. Que vaut le minimum ? Appliquer l'algorithme précédent pour $u^0 = (0, 0)$. Interpréter.

3.7 - On prend $J(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et $K = \{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 1\}$. Que se passe-t-il ?