TD2 **Analyse Numérique et Optimisation** H. Haddar

Méthode des différences finies pour les équations paraboliques

Exercice 1. Analyse de stabilité L^2 du θ-schéma

On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

avec $u(\cdot,t)$ et u_0 périodiques de période 1. On considère le schéma aux différences finies qui s'écrit, avec les notations habituelles :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0,$$

θ désignant un paramètre réel entre 0 et 1.

1.1 - Discuter l'ordre et le caractère explicite du schéma en fonction de θ.

1.2 - Etudier par Fourier la stabilité L^2 du schéma suivant les valeurs de θ.

Exercice 2. Analyse L^∞ du schéma explicite

Pour approcher la solution de l'équation de convection-diffusion ($\nu \geq 0$),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

on considère le schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \tag{2}$$

complété par la condition initiale :

$$u_j^0 = u_0(x_j).$$

2.1 - Donner l'algorithme de calcul de la solution (on introduira $\beta = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ et $\alpha = V \frac{\Delta t}{\Delta x}$). Expliquer pourquoi la solution numérique u_j^n se propage "à vitesse finie".

Dans la suite on adoptera la notation : $u_h := (u_j)$ et $\|u_h\|_\infty := \sup_j |u_j|$ avec $h = \Delta x$.

2.2 - Montrer que si $V \geq 0$ et $\alpha + 2\beta \leq 1$ alors la solution discrète vérifie le principe du maximum discret :

$$a \leq u_j^0 \leq b \Rightarrow a \leq u_j^n \leq b.$$

En particulier $\|u_h^n\|_\infty \leq \|u_h^0\|_\infty$ (on dit que le schéma est donc L^∞ stable).

2.3 - Montrer que cette condition est nécessaire lorsque $V \geq 0$.

Qu'en est-il pour $V < 0$?

Que se passe t-il lorsque $\nu = 0$?

Quel est le résultat de convergence qui en découle ?

2.4 - Etudier la convergence L^2 du schéma.

Exercice 3. Schémas de Richardson et de DuFort-Frankel.

On s'intéresse à l'équation de la chaleur en dimension 1 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{3}$$

que l'on approche à l'aide du schéma de Richardson :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \tag{4}$$

3.1 - Quel est a priori l'inconvénient pratique de ce schéma ? Montrer qu'il s'agit d'un schéma du second ordre en espace et en temps mais inconditionnellement instable.

3.2 - Dans (4), on remplace u_j^n par $\frac{u_j^{n+1}+u_j^{n-1}}{2}$. On obtient ainsi le schéma de DuFort-Frankel. Montrer que ce schéma est explicite et inconditionnellement stable.

3.3 - Analyser l'erreur de troncature du schéma de DuFort-Frankel et conclure (le schéma n'est consistant que si $\Delta t/\Delta x$ tend vers 0). Ce résultat était-il prévisible ?