Formulations Variationnelles

Exercice 1. F.V. symétrique et minimisation

Soit X un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur $X \times X$, et ℓ une forme linéaire continue sur X. Montrer que la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$$

admet un minimum unique u sur X caractérisé par,

$$a(u,v) = \ell(v), \quad \forall\, v \in X.$$

Exercice 2. Problème de Neumann

On considère le problème aux limites de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P1)$$

où f et g sont continues sur resp. $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$, et où Ω désigne un ouvert borné régulier et connexe.

2.1 - Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace $X = \{u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})\}$ et montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ est solution de $(P1)$ si et seulement si elle est solution de (V).

2.2 - La forme bilinéaire dans (V) peut-elle être coercive ? Donner une condition nécessaire d'existence de solution de $(P1)$ portant sur f et g (condition dite de compatibilité).

2.3 - Montrer que u est solution de (V) si et seulement si elle minimise sur X une fonctionnelle $J(v)$ que l'on précisera.

2.4 - Établir l'unicité à une constante près de la solution du problème variationnel si elle existe.

Exercice 3. Conditions de transmission

On considère l'équation de la chaleur dans un solide Ω de conductivité $k(x)$. Soit Ω_1 un ouvert strictement inclus dans Ω. On note $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$. On suppose que la conductivité $k(x)$ est donnée par

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in \Omega_1, \\ k_2 & \text{si } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Le solide est maintenu à la température nulle sur $\partial\Omega$ et chauffé par une source de chaleur volumique $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. La température à l'équilibre

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{si } x \in \Omega_1, \\ u_2(x) & \text{si } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

est solution de l'équation

$$\begin{cases} -k_1 \Delta u_1 = f & \text{sur } \Omega_1, \\ -k_2 \Delta u_2 = f & \text{sur } \Omega_2, \\ u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_1 = u_2 & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ k_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega_1, \end{cases} \qquad (P2)$$

où n est la normale extérieure à Ω_1.

3.1 - Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace

$$X = \{u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : u|_{\Omega_1} \in \mathcal{C}^1(\Omega_1), u|_{\Omega_2} \in \mathcal{C}^1(\Omega_2) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

3.2 - Montrer qu'une fonction

$$u \in \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_{\Omega_1} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}_1), v|_{\Omega_2} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}_2) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

est solution de $(P2)$ si et seulement si elle est solution de (V).

Exercice 4. Equation de convection-diffusion

Soit Ω un ouvert régulier connexe. On considère l'équation de convection-diffusion

$$\begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P3)$$

où $V \in C^1(\overline{\Omega})^2$ est un champ à divergence nulle.

4.1 - Ecrire une formulation variationelle de ce problème.

4.2 - Peut-on associer à ce problème un problème de minimisation comme nous l'avons fait à l'exercice 1 ?

4.3 - Montrer que $(P3)$ admet au plus une solution.

4.4 - Aurait-on obtenu un résultat identique si la divergence de V admettait des valeurs strictement positives ?

Exercice 5. Equation des plaques

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P4)$$

où f est continue sur $\bar{\Omega}$.

5.1 - Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème ne faisant intervenir que des dérivées d'orde 2. Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ est solution de $(P4)$ si et seulement si elle est solution de (V).

5.2 - Montrer que u est solution de (V) si et seulement si elle minimise sur X une fonctionnelle $J(v)$ que l'on précisera.

5.3 - Établir l'unicité de la solution du problème variationnel si elle existe.

Exercice 6. Conditions de Dirichlet non homogène

Soit Ω un ouvert borné, régulier. On considère l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Ecrire une formulation variationnelle de ce problème utilisant l'espace variationnel du problème de Dirichlet homogène.