Dérivation Faible et Espaces de Sobolev

Exercice 1. Dérivation faible et l'espace H^1 en dimension 1

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et v une fonction de $L^2(I)$ on dit que v admet une déridée faible dans L^2 s'il existe une fonction de $L^2(I)$, notée v', telle que, pour toute fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ (espace des fonctions C^∞ à support compact dans I) :

$$\int_a^b v'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_a^b v(x)\varphi'(x)\,dx$$

On appelle $H^1(I)$ le sous-espace des fonctions de $L^2(I)$ amettant une dérivée faible dans $L^2(I)$, ce que l'on écrit :

$$H^1(I) = \left\{v \in L^2(I) \text{ tq } v' \in L^2(I)\right\}.$$

1.1 - Montrer que si $v \in L^2(I)$ avec $v' = 0$ alors v est une fonction constante.

1.2 - Soit $v \in H^1(I)$. On pose $w(x) = \displaystyle\int_a^x v'(t)dt$. Montrer que $w \in H^1(I)$ et que $w' = v'$.

1.3 - En déduire que, pour toute fonction $v \in H^1(I)$:

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(t)\,dt, \qquad \forall x \in \bar{I},\ \ \forall y \in \bar{I}.$$

1.4 - Soit $v \in H^1(I)$ et $\psi \in C^\infty(\bar{I})$, montrer que $\psi v \in H^1(I)$ et que :

$$(\psi v)' = \psi' v + \psi v'.$$

Exercice 2. Propriétés de H^1 en dimension 1

On reprend les notations de l'exercice précédent. D'autre part on désigne par $\mathcal{C}^0(\bar{I})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{I}$ muni de la norme :

$$\|v\|_{\mathcal{C}^0(\bar{I})} = \sup_{x\in\bar{I}} |v(x)|$$

qui en fait un espace de Banach. Plus généralement, si $\alpha \in]0, 1[$, on pose :

$$\mathcal{C}^\alpha(\bar{I}) = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{I}) \ /\ \exists\, C > 0 \quad \text{tel que } |v(x) - v(y)| \leq C\,|x - y|^\alpha\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|v\|_{\mathcal{C}^\alpha(\bar{I})} = \|v\|_{\mathcal{C}^0(\bar{I})} + \sup_{(x,y)\in\bar{I}^2} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

$\mathcal{C}^\alpha(\bar{I})$ est ainsi un espace de Banach.

2.1 - Montrer que $H^1(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I})$ et que l'injection est continue (on donnera une estimation de la constante de continuité).

2.2 - Montrer que $H^1(I) \subset \mathcal{C}^{1/2}(\bar{I})$ et que l'injection est continue. Montrer que $H^1(I)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{C}^\alpha(\bar{I})$ pour $\alpha > 1/2$.

On rappelle le *Théorème d'Ascoli* : *Soit K un espace métrique compact (on note $d(.,.)$ la distance) et soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}^0(K)$. Si $\mathcal{B}$ est uniformément équicontinu, i.e., si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{B},$$

alors $\mathcal{B}$ est relativement compact : autrement dit, de tout suite de $\mathcal{B}$ on peut extraire une sous-suite convergente pour la topologie de $\mathcal{C}^0(K)$.

2.3 - Montrer que l'injection de $H^1(I)$ dans $\mathcal{C}^0(\bar{I})$, et donc dans $L^2(I)$ est compacte. Montrer que le résultat est faux dans $H^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Exemples de fonctions H^1

3.1 - Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ avec Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints de bords lipschitziens. Montrer que toute fonction $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ telle que $u_{|\Omega_i} \in C^1(\bar{\Omega}_i)$ pour $i = 1, 2$, appartient à $H^1(\Omega)$.

On note $\Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ et $\gamma_i : H^1(\Omega_i) \to \Gamma$ l'application trace sur Γ. Montrer que le résultat reste vrai lorsque $u_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ et $\gamma_1(u_{|\Omega_1}) = \gamma_2(u_{|\Omega_2})$.

3.2 - Trouver une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que φ soit dérivable presque partout, telle que la fonction g définie presque partout par

$$g(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t}$$

appartienne à $L^2(\mathbb{R})$ et telle que $\varphi \notin H^1(\mathbb{R})$.

3.3 - Soit $R < 1$ et $B_R \subset \mathbb{R}^2$ le disque de centre 0 et de rayon R. Montrer que la fonction

$$u(x,y) = |\log(\sqrt{x^2+y^2})|^k$$

appartient à $L^2(B_R)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de k cette fonction est-elle dans $H^1(B_R)$? Déduire qu'une fonction de $H^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ n'admet pas de représentant continu en général.

Exercice 4. Inégalités de type Poincaré

Soit Ω un ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^n$.

4.1 - Montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in H^1(\Omega)$,

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le Théorème de Rellich.

4.2 - Montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in H^1(\Omega)$,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma(f)\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$

où $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ désigne l'application trace.

Exercice 5. Espaces de Sobolev périodiques

Soit $I =]-\pi, \pi[$. On note $H^1_p(I)$ le sous-espace des fonctions u de $H^1(I)$ avec conditions aux bords de périodicité, c'est à dire telles que

$$u(\pi) = u(-\pi).$$

5.1 - Montrer que pour toutes fonctions v et $u \in H^1_p(I)$,

$$\int_I v'(x)u(x)dx = -\int_I v(x)u'(x)dx.$$

5.2 - Donner l'expression des normes $H^1(I)$ et $L^2(I)$ des éléments de $H^1_p(I)$ en fonction de leurs coefficients de Fourier.

5.3 - Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in H^1_p(I)$ tel que $\int_I u(x)dx = 0$,

$$\int_I |u|^2 dx \leq C \int_I |u'|^2 dx.$$

Déterminer la meilleur constante C possible.

5.4 - Prouver que l'injection de $H^1_p(I)$ dans $L^2(I)$ est compacte (sans l'utilisation du théorème d'Ascoli).