**Problèmes aux limites et formulations variationnelles**

### Exercice 1. Laplacien avec conditions aux limites de Fourier

Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On considère le problème aux limites consistant à déterminer $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta u &= f \text{ dans } \Omega \\ \alpha u + \dfrac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $\beta \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

**1.1 -** Etablir la formulation variationnelle associée à ce probème. Donner des conditions suffisantes sur $\alpha$ et $\beta$ pour que la formulation variationnelle admette une solution $u \in H^1(\Omega)$.

**1.2 -** On suppose que $g$ est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Montrer que la solution variationnelle (faible) $u$ est une "solution classique" du problème aux limites.

**1.3 -** On prend $\beta = 0$ et on note $u_\alpha$ la solution associée à la valeur $\alpha$ du paramètre qui intervient dans la condition aux limites.

(i) Préciser le comportement de $u_\alpha$ quand $\alpha$ tend vers $+\infty$.

(ii) Préciser le comportement de $u_\alpha$ quand quand $\alpha$ tend vers 0.

### Exercice 2. Problème d'advection-diffusion

Dans cet exercice $\Omega$ désigne un ouvert assez régulier de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\Gamma$. On s'intéresse à l'équation d'advection-diffusion stationnaire :

$$\begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u + qu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

où $f$, $V$ et $q$ sont donnés respectivement dans $L^2(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)^N$ et $L^\infty(\Omega)$. On pose $q_* = \inf q(x)$. On cherche la solution $u$ dans $H^1(\Omega)$.

**2.1 -** Démontrer que (1) admet une solution unique dès que l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

$(i)$ $\inf_{x\in\Omega}(4q - |V|^2) > 0$

$(ii)$ $\operatorname{div} V \in L^\infty(\Omega)$, $\inf_{x\in\Omega}(q(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div} V(x)) > 0$

**2.2 -** Montrer que, si $\Omega$ est borné, les conditions (i) et (ii) peuvent être remplacées par :

$(i)'$ $(1 - \sqrt{C}|V|_\infty + \inf(0, q_*)C) > 0$

$(ii)'$ $\operatorname{div} V \in L^\infty(\Omega)$, $\inf_{x\in\Omega}(q(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div} V(x)) > -C$

où $C$ est la constante de l'inégalité de Poincaré : $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ $\forall u \in H^1_0(\Omega)$.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $q_* > 0$ et que $f \in L^\infty(\Omega)$.

**2.3 -** Montrer, en utilisant la question (2.1), qu'en choisissant $M > 0$ assez grand, si $v \in H^1(\Omega)$ vérifie :

$$-\Delta v + V \cdot \nabla v + (q + M)\, v = g \quad \text{dans } \Omega,$$
$$g \in L^2(\Omega)\,, \quad g \leq 0 \text{ dans } \Omega,$$

avec la condition sur le bord :

$$v \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

alors la fonction $v$ est négative ou nulle dans $\Omega$. Que devient le résultat si $g \geq 0$ et $v \geq 0$ sur $\Gamma$ ?

**2.4 -** Montrer alors que si $u \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est solution de (1) alors on a la double inégalité :

$$\min\left(\frac{f_*}{q_*}, 0\right) \leq u \leq \max\left(\frac{f^*}{q_*}, 0\right) \quad \text{p.p. dans } \Omega \tag{2}$$

où $f_* = \inf f(x)$ et $f^* = \sup f(x)$. En déduire un résultat d'unicité pour (1).

On se propose maintenant de montrer l'existence de la solution même en l'absence de coercivité lorsque l'ouvert $\Omega$ est borné.

**2.5 -** Démontrer que si $M > 0$ est bien choisi, on peut définir une suite $u^n$ dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec le procédé itératif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u^{n+1} + V \cdot \nabla u^{n+1} + (q+M)u^{n+1} = f + Mu^n \\ \\ u^{n+1} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{array} \right. \tag{3}$$

où $u^0$ est donné dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

**2.6 -** Démontrer les estimations a priori :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u^{n+1} - u^n\|_{L^\infty} \leq \dfrac{M}{M+q_*} \|u^n - u^{n-1}\|_{L^\infty} \\ \\ \|u^{n+1} - u^n\|_{H^1} \leq C \, \|u^n - u^{n-1}\|_{L^\infty} \end{array} \right. \tag{4}$$

où $C$ est une constante que l'on précisera.

**2.7 -** Déduire de ce qui précède un résultat d'existence et d'unicité pour (1).