Problèmes aux limites et formulations variationnelles (suite)

Exercice 1. Problème de Maxwell

On s'intéresse ici aux équations venant de la modélisation de phénomènes électromagnétiques. On suppose que le problème est posé dans un domaine Ω ouvert, borné et lipschitzien de $\mathbb{R}$. On note en gras les fonctions à valeurs vectorielles. On rappelle que pour toute fonction u régulière de Ω dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{rot}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, -\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$$

et pour toute fonction $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ de Ω dans $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

On note $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal extérieur à Ω sur $\partial\Omega$. Dans certains cas on est amené à rechercher la solution $\mathbf{u}$ du problème

$$\mathbf{rot}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

où la solution $\mathbf{u}$ inconnue est un champ de vecteurs au moins dans $(L^2(\Omega))^2$ et $\mathbf{f}$ est donné (disons dans $(L^2(\Omega))^2$).

1.1 - Établir la formule d'intégration par parties suivante pour des fonctions assez régulières

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \chi dx = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}\, \chi dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} \chi ds$$

1.2 - On introduit le cadre fonctionnel ou l'analyse du problème va se dérouler. Il s'agit de l'espace $H(\mathrm{rot}; \Omega)$ défini de la façon suivante :

$$H(\mathrm{rot}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 ; \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \in L^2(\Omega))$$

que l'on munit de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{rot},\Omega)} = (\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \|\,\mathrm{rot}\, \mathbf{v}\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

Donner un sens au rotationnel faible. Montrer que l'espace $H(\mathrm{rot}; \Omega)$ est un Hilbert.

1.3 - On supposera que l'application "trace tangentielle" $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \wedge \mathbf{n}$ est continue de $H(\mathrm{rot}; \Omega)$ sur un espace M de Hilbert de fonctions définies sur $\partial\Omega$ et qui n'est pas précisé ici. On introduit alors l'espace $H_0(\mathrm{rot}; \Omega)$ des fonctions de $H(\mathrm{rot}; \Omega)$ de trace tangentielle nulle. Montrer que c'est un espace de Hilbert.

1.4 - Montrer que le problème de Maxwell, supplémenté de conditions aux limites de type "trace tangentielle nulle" possède la formulation variationnelle suivante

$$\int_\Omega (\mathrm{rot}\, \mathbf{u}) \cdot (\mathrm{rot}\, \mathbf{v}) + \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \qquad \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathrm{rot}; \Omega).$$

Montrer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème dans $H_0(\mathrm{rot}; \Omega)$.

Exercice 2. Équations de Darcy

On s'intéresse dans ce qui suit au problème dit de Darcy dans un domaine Ω ouvert, borné, connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal extérieur à Ω sur $\partial\Omega$. Pour $\mathbf{f}$ donnée dans $L^2(\Omega)^2$, on cherche une pression p et une vitesse $\mathbf{u}$ solutions du système d'équations

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Ces équations modélisent des écoulements incompressibles dans des milieux poreux.

2.1 - On note

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ tq. \int_\Omega v(x) dx = 0 \right\}.$$

Montrer que le système (1) admet la formulation variationnelle suivante : trouver un couple $(\mathbf{u}, p)$ dans $L^2(\Omega)^2 \times \tilde{H}^1(\Omega)$ tel que $\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2$ et $\forall q \in \tilde{H}^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx + b(\mathbf{v}, p) &= \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx, \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0, \end{aligned}$$

où la forme bilinéaire b est définie par

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_\Omega \mathbf{v}(x) \cdot \nabla q(x) dx,$$

$\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2$ et $\forall q \in H^1(\Omega)$.

2.2 - On introduit l'espace

$$V = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 \; tq. \; b(\mathbf{v}, q) = 0 \; \forall q \in \tilde{H}^1(\Omega)\}$$

Montrer que c'est un sous espace de Hilbert de $L^2(\Omega)^2$. Écrire le problème variationnel vérifié par $\mathbf{u}$ sur cet espace et montrer qu'il est bien posé.

2.3 - Montrer qu'il existe une pression unique $p \in \tilde{H}^1(\Omega)$ qui avec $\mathbf{u}$ forme l'unique solution de (2)-(2). Montrer la stabilité de cette solution par rapport aux données.

Exercice 3. Système d'élasticité (correction : voir poly)

Considérons un solide homogène isotrope occupant le domaine régulier borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière Γ. On se place dans l'hypothèse des petits déplacements $\mathbf{u}$ qui sont solutions du système de l'élasticité linéaire,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\{\sigma_{i,j}(\mathbf{u})\}_{1 \leq i,j \leq 3}$ désigne le tenseur des contraintes élastiques relié au tenseur des déformations

$$\epsilon_{i,j}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

à l'aide de la loi de comportement suivante

$$\sigma_{i,j}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{tr}(\epsilon) \, \delta_{i,j} + 2\mu \; \epsilon_{i,j}(\mathbf{u})$$

où (λ, μ) désigne les coefficients de Lamé. On a utilisé les notations suivantes,

$$(\operatorname{div} \sigma)_i = \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} \;, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \,.$$

3.1 - Montrer que la formulation variationnelle associée consiste à rechercher $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$ tel que

$$\lambda \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) \, (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx + 2\mu \int_\Omega \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx, \quad \forall \, \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3$$

où on a utilisé la notation suivante

$$\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i,j} \epsilon_{i,j}(\mathbf{u}) \epsilon_{i,j}(\mathbf{v})$$

3.2 - Etablir la première inégalité de Korn,

$$\|\epsilon(\mathbf{u})\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times3}} \geq \frac{1}{2} \| \mathrm{D} \, \mathbf{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times3}}$$

$\forall \mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$, où $(\mathrm{D} \, \mathbf{u})_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

3.3 - Démontrer alors que pour $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ et $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$, cette formulation variationnelle admet une unique solution.

Exercice 4. Régularité de la solution variationnelle (exercice optionnel)

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On considère le problème suivant consistant à déterminer $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$-\Delta u + u \;=\; f \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

4.1 - Écrire une formulation variationnelle de ce problème dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

4.2 - Soit $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $h \in \mathbb{R}^N$. On pose

$$D_h v(x) = \frac{v(x+h) - v(x)}{|h|}.$$

Montrer qu'on a toujours

$$\|D_h v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

4.3 - Réciproquement, soit $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$; Montrer que s'il existe une constante C telle que pour tout $h \neq 0$, on a $||D_h v||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C$ alors $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

4.4 - En utilisant l'équation satisfaite par $D_h u$, montrer que $\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. En déduire que u appartient en fait à $H^2(\mathbb{R}^N)$.

4.5 - Écrire l'équation satisfaite par $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et en déduire que, si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ avec m entier positif, alors $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$.