**Analyse Numérique et Optimisation**
**Eléments Finis**

H. Haddar

## Exercice 1. Eléments finis de Lagrange

Pour $m > 0$ entier fixé et $h = 1/N$ on considère les espaces (éléments finis $P_m$ de Lagrange)

$$V_h^m := \{f \in C^0([0,1]) \ ; \ f_{|[jh,(j+1)h]} \in \Pi_m, \\ j = 0, \ldots, N-1\},$$

où $\Pi_m$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $m$.

**1.1 -** Expliquer pourquoi $V_h^m \subset H^1(0,1)$. Quel est la dimension de $V_h^m$ ? Exhiber une base de cet espace ainsi qu'un opérateur d'interpolation $r_h$ de $H^1$ sur $V_h^m$.

**1.2 -** Montrer que pour $1 \leq n \leq m+1$, il existe une constante $C$ telle que pour tout $u \in H^n(]0,1[)$,

$$\|r_1 u - u\|_{H^1} \leq C \|u^{(n)}\|_{L^2}. \qquad (1)$$

*Indications :* Soit $R_{n-1}$ la projection orthogonale $L^2$ sur l'ensemble des polynômes de degré au plus $n-1$. Montrer que pour tout $u \in H^n(]0,1[)$, et $n \leq m+1$,

$$u - r_1 u = v - r_1 v, \text{ où } v = u - R_{n-1} u.$$

En supposant que l'inégalité (1) est fausse pour tout $C$, construire une suite de fonctions $v_k \in H^n(]0,1[)$ orthogonales à l'ensemble des polynômes de degré $n-1$, telles que $\|v_k\|_{H^1} = 1$, $\|v_k^{(n)}\|_{L^2} \to 0$. Obtenir une contradiction en utilisant le Lemme de Rellich.

**1.3 -** Déduire que pour $1 \leq n \leq m+1$, il existe une constante $C$ telle que pour tout $u \in H^n(]0,1[)$,

$$\|r_h u - u\|_{L^2} \leq C h^n \|u^{(n)}\|_{L^2}$$

Montrer de même qu'il existe une constante $C$ telle que pour tout $u \in H^n(]0,1[)$,

$$\|(r_h u)' - u'\|_{L^2} \leq C h^{n-1} \|u^{(n)}\|_{L^2}$$

**1.4 -** Quel est l'image de $H_0^1(]0,1[)$ par l'application $r_h$ ?

**1.5 -** En déduire une estimation d'erreur pour la méthode de Galerkin sur $V_h^m$ pour le problème

$$-u'' = f \text{ sur } ]0,1[ \ \ u(0) = u(1) = 0.$$

suivant la régularité de $f$. A-t-on a priori intérêt à utiliser $m > 1$ si $f$ est seulement $L^2$ ?

## Exercice 2. Lemme de Aubin-Nitsche

On considère $u$ solution du problème de la question (1.5) de l'exercice 1 et sa discrétisation $u_h$ par des éléments $P_1$ de Lagrange. Montrer que l'on a l'estimation

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C h^2 \|u''\|_{L^2}.$$

Indication : considérer le problème auxiliaire $-w'' = u - u_h$ avec les mêmes conditions aux limites, et utiliser $w$ et son approximation $r_h w$ dans $V_h$ pour estimer $\|u - u_h\|_{L^2}^2$.

## Exercice 3. Méthode spectrale

On considère la base orthonormale de Fourier sur $[0,1]$ définie par

$$e_p(x) = e^{i2\pi px}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

et les espaces d'approximation $V_N = \text{Vect}\{e_p \ ; |p| \leq N\}$.

**3.1 -** Exprimer, si $u \in H^n_{per}$ (espace des fonctions $H^n$ de période 1), $n \geq 1$, les normes $L^2$ de $u$ et de ses dérivées dans cette base. En déduire le résultat d'approximation suivant : pour tous $k \leq n$ et $u \in H^n_{per}$,

$$\inf_{u_N \in V_N} \|u^{(k)} - u_N^{(k)}\|_{L^2} \leq C_{n,k} N^{-(n-k)} \|u^{(n)}\|_{L^2},$$

**3.2 -** En déduire des estimations d'erreur pour la méthode de Galerkin dans $V_N$ (restreint aux fonctions à valeurs réelles) appliquée au problème

$$-[au']' + bu = f \text{ sur } ]0,1[ \ \ u(0) = u(1),$$

avec $a(x) \geq a_m > 0$ et $b(x) \geq b_m > 0$ fonctions continues, suivant la régularité de la solution. Quelle est la forme de la matrice de rigidité dans le cas où $a$ et $b$ sont constantes ? Quel sont les avantages et les inconvénients de cette méthode dans le cas général ?