TD8 **Analyse Numérique et Optimisation** O.Pantz

Problèmes aux valeurs propres

Exercice 1. Valeurs propres du Laplacien dans un rectangle

1.1 - Déterminer les solutions du problème de valeurs propres suivant :

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u \quad \text{dans }]0, L[, \quad u(0) = u(L) = 0. \quad (1)$$

Utiliser les coefficients d'une décomposition d'une fonction u sur cette base pour caractériser l'appartenance aux espaces $L^2(]0, L[)$, $H_0^1(]0, L[)$, $H^2(]0, L[) \cap H_0^1(]0, L[)$.

1.2 - Calculer les vecteurs et valeurs propres en utilisant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{array}{l} (a): \ u'(0) = u'(L) = 0. \\ (b): \ u(0) = 0, u'(L) = 0. \\ (c): \ u'(0) = 0, u(L) = 0. \end{array}$$

1.3 - On pose $\Omega \ =]0, L_1[\times]0, L_2[$. Utiliser les résultats de la question 1.1 pour résoudre le problème de valeurs propres :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

On justifiera avec soin le fait que l'on a obtenu toutes les valeurs propres.
En déduire une caractérisation des espaces $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

1.4 - Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres du Laplacien lorsque l'on change les conditions aux limites en remplaçant la condition de Dirichlet homogène par la condition de Neumann homogène sur un ou plusieurs des côtés du rectangle Ω.

Exercice 2. Application du principe du min-max

2.1 - Soit λ_1 la plus petite valeur propre du Laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet. Montrer que λ_1^{-1} est la plus petite constante C possible dans l'inégalité de Poincaré :

$$\int_\Omega |v|^2 \, dx \le C \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2.2 - Soit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ deux ouverts bornés réguliers de $\mathbb{R}^N$, et λ_n^1 (resp. λ_n^2), $n \ge 1$, les valeurs propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes dans le domaine Ω_1 (resp. Ω_2). On suppose ces valeurs propres rangées par ordre croissant et répétées autant de fois que leur multiplicité.

Montrer que : $\lambda_k^1 \ge \lambda_k^2 \quad \forall k \ge 1$.

Application : Pourquoi les petits tambours produisent-ils des sons plus aigus que les gros (indépendamment de leur forme) ?

2.3 - Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^N$ et Γ une portion de $\partial\Omega$ de mesure > 0. On considère, pour $\rho > 0$, les valeurs propres $\lambda_k(\rho)$ du Laplacien avec les conditions aux limites mixtes :

$$\begin{cases} u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \partial u/\partial n + \rho u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Montrer que $\lambda_k(\rho) \le \lambda_k \quad \forall k \ge 1$ et que l'application $\rho \mapsto \lambda_k(\rho)$ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Approximation variationnelle des problèmes spectraux

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $\mathcal{T}_h$ de maillages triangulaires réguliers de Ω. Soit V_{0h} le sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ défini par la méthode des éléments finis P_1. Soit (λ_i, u_i) les valeurs et vecteurs propres (orthonormés dans $L^2(\Omega)$) du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes ; les valeurs propres étant rangées par ordre croissant :

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \lambda_i u_i & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

3.1 - Quelle est l'approximation variationnelle dans V_{0h} associée au problème (3).

3.2 - On cherche à prouver la convergence des valeurs propres $\lambda_{i,h}$ de l'approximation variationnelle vers λ_i. On note W_i l'espace vectoriel engendré par les i premiers vecteurs propres du Laplacien. A l'aide du principe de min-max, montrer que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n_{dl}$,

$$\lambda_i \leq \lambda_{i,h}, \quad (n_{dl} \text{ est la dimension de } V_{0h}).$$

3.3 - Il nous reste à majorer $\lambda_{i,h}$. A cet effet, on note que pour tout $W_{i,h}$ sous espace de V_{0h} de dimension i, on a

$$\lambda_{i,h} \leq \max_{v_h \in W_{i,h} \setminus \{0\}} \left(R(v_h) = \frac{a(v_h, v_h)}{\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)}} \right), \qquad (4)$$

avec $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$.

En choisissant convenablement $W_{i,h}$, on obtiendra dans les questions qui suivent le résultat de convergence recherché.

On note Π_h la projection orthogonale de H^1_0 sur V_{0h} : ainsi, $\Pi_h u \in V_{0h}$ et

$$\forall v_h \in V_{0h}, \quad \int_\Omega \nabla(\Pi_h u - u) \nabla v_h dx = 0.$$

3.3-(a) Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \|\Pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0.$$

3.3-(b) Montrer que pour tout $u \in W_i$,

$$\|\Pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{l=1}^{i} \|\Pi_h u_l - u_l\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

En déduire que

$$\lim_{h \to 0} \sup_{u \in W_i \setminus \{0\}} \frac{\|\Pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} = 0.$$

3.3-(c) Montrer que pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$,

$$a(\Pi_h u, \Pi_h u) \leq a(u,u).$$

3.3-(d) En choisissant $W_{i,h} = \Pi_h(W_i)$ dans (4), montrer que

$$\lambda_{i,h} \leq \lambda_i \max_{u \in W_i} \frac{\|u\|^2_{L^2}}{\|\Pi_h u\|^2_{L^2}}.$$

En déduire que $\lambda_{i,h} \to \lambda_i$ lorsque $h \to 0$.