Equations d'évolution

Exercice 1. Existence de solutions par semi discrétisation en temps

1.1 - On considère l'approximation implicite suivante de l'équation de la chaleur (dans Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$) : $u^0 = u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n \in H_0^1(\Omega)$ est donnée par :

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = \Delta u^n + f \qquad (1)$$

où $\tau > 0$ est un pas de temps, et $f \in L^2(\Omega)$ est un terme source (indépendant du temps, pour simplifier). Justifier l'existence de u^n.

1.2 - En prenant comme fonction test $u^n - u^{n-1}$ dans le problème variationnel, montrer que

$$\int_\Omega \frac{\left(u^n - u^{n-1}\right)^2}{\tau}\, dx + \mathcal{E}(u^n) \leq \mathcal{E}(u^{n-1}) \qquad (2)$$

où l'énergie $\mathcal{E}(u) := \int_\Omega \left(|\nabla u|^2/2 - fu\right)\, dx$.

1.3 - En déduire que l'énergie $\mathcal{E}(u^n)$ est bornée, uniformément en n.

1.4 - On introduit les fonctions (respectivement, constante et affine par morceaux en temps)

$$u_\tau(x,t) = u^n(x)$$

lorsque $t \in ((n-1)\tau, n\tau]$ et

$$\hat{u}_\tau(x,t) = u^{n-1}(x)(1-\theta) + u^n(x)\theta$$

lorsque $t = ((n-1)+\theta)\tau$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Montrer (à partir de la question précédente) que

$$\|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\tau}.$$

En déduire que

$$\|u_\tau(t) - \hat{u}_\tau(t)\| \to 0,$$

uniformément en temps, lorsque $\tau \to 0$.

1.5 - Que vaut $\partial \hat{u}_\tau / \partial t$? On se fixe $T > 0$. Montrer que $\hat{u}_\tau$ est uniformément bornée dans $H^1(\Omega\times]0,T[)$.

Indication : On montrera séparément que

$\hat{u}_\tau$ est bornée dans $L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega))$, et que

$\dfrac{\partial \hat{u}_\tau}{\partial t}$ est bornée dans $L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$.

1.6 - En déduire l'existence d'une suite $\tau_k \to 0$ telle que $\hat{u}_{\tau_k}$ converge dans $L^2(\Omega\times]0,T[)$ vers une fonction $u(x,t)$. On admet qu'on a dans ce cas $u \in H^1(\Omega\times]0,T[)$. Que peut-on dire de u_{τ_k} ?

1.7 - Montrer que si $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T[)$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_\tau}{\partial t}\phi + \nabla u_\tau \cdot \nabla \phi - f\phi \, dxdt = 0.$$

En déduire qu'au sens variationnel, u résout

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\,, \\ u(t=0) = u_0 & \end{cases} \qquad (3)$$

1.8 - Si u est une solution régulière de (3), montrer que pour tout temps t,

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt = \mathcal{E}(u(0)) - \mathcal{E}(u(t))\,.$$

Commentaire : L'estimation ci-dessus (avec $\leq$ à la place de $=$) est ce qu'on appelle une "estimation *a priori*" : on sait qu'elle est vraie pour des solutions assez régulières de (3), avant de savoir si de telles solutions existent. La technique utilisée dans cet exercice, consistant à chercher un problème approché qu'on sait résoudre, et dont les solutions vont vérifier une estimation *a priori* du problème limite, puis à utiliser cette estimation pour passer à la limite, est une des méthodes les plus importantes de démonstration d'existence pour des EDPs.

Exercice 2. Equation des plaques

Soit Ω un ouvert régulier, borné de $\mathbb{R}^n$. On étudie l'équation des plaques

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta(\Delta u)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u(t,x) = \partial_n u(t,x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0, \\ \partial_t u(0,x) = u_1 \end{cases}$$

2.1 - Déterminer la formulation variationnelle associée à ce problème d'évolution.

2.2 - Prouver l'existence de solution à ce problème variationnel (préciser notamment dans quels espaces on choisi f, u_0 et u_1).

2.3 - Montrer qu'une solution régulière du problème variationnel est solution du problème initial.

Exercice 3. Equations de Maxwell

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert régulier borné. On considère les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t E + \operatorname{rot} H = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_t H - \operatorname{rot} E = 0 & \text{dans } \Omega \\ E \wedge n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ E(0,x) = E_0(x) & H(0,x) = H_0(x). \end{cases}$$

E et H désigne respectivement le champ électrique et magnétique. On suppose de plus que $\operatorname{div}(E_0) = 0$.

On rappelle que

$$\operatorname{rot}(E) = (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

ainsi que la formule d'intégration par partie

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} F \cdot G - F \cdot \operatorname{rot} G) dx = \int_{\partial\Omega} (n \wedge F) \cdot G d\sigma.$$

On introduit enfin les espaces

$$H(\operatorname{rot}) = \{F \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{rot} F \in L^2(\Omega)^3\}$$
$$H(\operatorname{div}; 0) = \{F \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div} F = 0\},$$

munis des normes

$$\|F\|^2_{H(\operatorname{rot})} = \|F\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\operatorname{rot} F\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$
$$\|F\|_{H(\operatorname{div};0)} = \|F\|_{L^2(\Omega)^3}$$

On définit l'application γ de $H(\operatorname{rot})$ dans son dual, par

$$\langle \gamma(F), G \rangle_{H(\operatorname{rot})', H(\operatorname{rot})} = \int_\Omega (\operatorname{rot} F \cdot G - F \cdot \operatorname{rot} G) dx.$$

Enfin, on pose

$$H_0(\operatorname{rot}) = \gamma^{-1}(0).$$

3.1 - On suppose que (E, H) est une solution régulière des équations de Maxwell. Montrer que E est solution du problème variationnel consistant à déterminer

$$E(t) \in V = H_0(\operatorname{rot}) \cap H(\operatorname{div}; 0)$$

tel que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle E(t), F \rangle_H + a(E(t), F) = 0 \ \ \forall\, F \in V \\ E(0) = E_0, \qquad \partial_t E(0) = -\operatorname{rot} H_0, \end{cases}$$

où $H = H(\operatorname{div}; 0)$ et $a(E,F) = \int_\Omega \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} F dx$.

3.2 - Donner un sens au rotationnel faible L^2 et montrer que V et H sont des espaces de Hilbert.

3.3 - Montrer qu'il existe ν tel que pour tout $F \in V$,

$$a(F,F) + \nu \|F\|^2_H \geq \|F\|^2_V.$$

3.4 - On admettra que V s'injecte continûment dans $H^1(\Omega)^3$ et que V est dense dans H. Montrer que la formulation variationnelle est bien posée.