UEVE 2018-2019
EC 322 Probabilités

Feuille 4 de travaux dirigés

Exercice 1. (*Loi uniforme*) On considère le jeu aléatoire suivant impliquant deux joueurs: un joueur R disposant de 3 pions rouges et un joueur V disposant de 3 pions verts. On considère un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) sur lequel on jette une petite bille selon une loi uniforme X sur $[a, b]$ de densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Le jeu se déroule comme suit.

- Les joueurs placent leur trois pions les uns après les autres en des points de l'intervalle $[a, b]$.
- Une fois placés les joueurs n'ont plus la possibilité de déplacer leurs pions.
- On lance la bille selon une loi uniforme sur $[a, b]$ et
  a) si la bille passe le plus près d'un des pions du joueur R que ceux du joueur V alors le joueur R marque un point
  b) si la bille passe le plus près d'un des pions du joueur V que ceux du joueur R alors le joueur V marque un point.
  c) sinon les joueurs marquent tous les deux un point.

  On renouvelle l'expérience à 10 reprises et le gagnant sera celui qui aura marqué le plus de points.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. Pour simplifier on pose $a = 0$ et $b = 1$. Le joueur R choisit les emplacements $1/6$, puis $1/2$ et ensuite $5/6$ de l'intervalle $[0, 1]$ et le joueur V les emplacements $1/4$, puis $1/2$ et ensuite $3/4$.
   a) Quelles sont les chances pour le joueur R de marquer un point.
   b) Quelles sont les chances pour le joueur V de marquer un point.
   c) En déduire lequel des deux joueurs a le plus de chances de gagner la partie.
   d) Existe-t-il une stratégie qui permet de toujours avoir le plus de chances de gagner quelque soit la stratégie de l'adversaire.

Exercice 2. (*Une loi continue*) Soit la fonction $f(x) = c\,x^2\mathbf{1}_{]0,4[}(x) = \begin{cases} c\,x^2 & \text{si } x \in]0, 4[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X la variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(2 < X < 4)$. Que vaut $\mathbb{P}(2 < X \leq 4)$?

Exercice 3. (*Loi exponentielle à partir d'une loi uniforme*) Soit X une v.a de loi uniforme sur $]0, 1[$.

1. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit Y la v.a. définie par $Y = a + (b - a)X$.
   (a) Déterminer la densité de probabilité de Y.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

2. Soit $\lambda > 0$ et soit Z la v.a. définie par

$$Z = -\frac{\ln(X)}{\lambda}.$$

   (a) Déterminer la densité de Z et identifier sa loi.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Z.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{\{Z\geq 2\}})$.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(Z^n)$ pour tout $n \geq 1$.
   (e) Montrer que pour tout $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Z > t + s | Z > s) = \mathbb{P}(Z > t).$$

Application. On considère les durées de vie (en année) d'ampoules de même type d'une usine de fabrication d'ampoules. On suppose que la durée de vie d'une ampoule est la v.a. Z de loi donnée précédemment de paramètre $\lambda = 1.5$. On achète une ampoule de ce type.

1. Quelle est la probabilité pour qu'elle dure au moins: 2 ans? 5 ans?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elle dure au moins un mois de plus sachant qu'elle a duré 2 ans?

Exercice 4. (*Moments d'une loi gaussienne standard*) Soit Y une v.a. gaussienne de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Montrer que
$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$
2. Calculer $\mathbb{E}(X^3)$ et $\mathbb{E}(X^4)$.
3. Calculer, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(X^{2n})$ et $\mathbb{E}(X^{2n+1})$.
4. Calculer $\mathbb{E}(e^{tX})$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (*Loi gaussienne*) Soit Y une v.a. gaussienne de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On rappelle que
$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

1. Démontrer que la v.a. X est symétrique par apport à sa moyenne, c'est-à-dire, X et $-X$ ont la même loi ou autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(-X \leq x).$$

   En déduire que pour tout $x \geq 0$,

   (a) $\mathbb{P}(|X| \geq x) = 2\,\mathbb{P}(X \geq x)$.
   (b) $\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\,\mathbb{P}(X \leq x) - 1$.

Application. On considère que la note de contrôle de probabilité des étudiants de L2 Maths est distribuée selon une loi normale de moyenne 12.5 et de variance 2 et que celle des étudiants de L1 Maths est distribuée selon une loi normale de moyenne 12.5 et de variance 7.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant de L1 Maths ait une note supérieure ou égale à 17.
2. Quelle est la probabilité qu'un étudiant de L2 Maths ait une note supérieure ou égale à 17.

3. Vous êtes en licence (sans avoir redoubler) et vous rencontrez un étudiant qui est entrée à l'université une année après vous et qui suit la filière Maths. Lors de votre conversation il vous dit avoir eu 17 en contrôle de probabilité sans vous avoir dit s'il est en L1 ou en L2. Pourriez-vous déviner son niveau le plus probable connaissant les statistiques précédentes.

Exercice 6. (*Loi gaussienne*) On vous distribue vos notes de probabilité et votre collègue vous dit avoir eu $18/20$ sans vouloir vous montrer sa copie.

On suppose que les notes de probabilité sont réparties selon une loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2 qui sont supposées être la moyenne empirique et la variance empirique de la classe communiquées par le professeur et qui sont respectivement de 11.75 et de 3.2.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant donné ait une note supérieure ou égale à 18.
2. Quelle crédibilité pouvez-vous accorder à l'affirmation de votre collègue.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne, de moyenne μ et de variance σ^2: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, et soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

1. Rappelez l'expression de la fonction de répartition F_Z de Z. Peut-on la calculer explicitement $F_Z(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
2. En vous servant de la table de la gaussienne, déterminez les quantités suivantes et représentez les graphiquement:
$$\mathbb{P}(Z \leq 0), \quad \mathbb{P}(|Z| \leq 3), \quad \mathbb{P}(|Z| > 3).$$
3. Déterminer les réels a et c tel que $\mathbb{P}(Z \leq a) = 0.05$; $\mathbb{P}(|Z| \leq c) = 0.05$.
4. On pose $\mu = 3.5$ et $\sigma^2 = 4$. Déterminer les quantités suivantes:
$$\mathbb{P}(X \leq 0) \quad \text{et } \mathbb{P}(X > 3).$$
5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et soit $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 8. On suppose que sur une seconde période d'un match de foot, le nombre X de kilomètres parcouru par un joueur non dopé suit une loi gaussienne de moyenne $\mu = 4.5$ km et de variance $\sigma^2 = 4$. Supposons que la FIFA décide de faire passer un "test pour dopage" à tout joueur dont le nombre de kilomètres parcouru x lors de la seconde partie est invraisemblablement élevé à leurs yeux, c'est-à-dire, $\mathbb{P}(X \geq x) \leq 0.005$.

1. Un joueur a parcouru 7.6 km lors de la seconde partie. Doit-on lui faire passer un "test pour dopage"?
2. Quelle est la distance minimale parcourue x à partir de laquelle on doit faire passer un "test pour dopage" à un joueur. C'est-à-dire, trouver x tel que $\mathbb{P}(X \geq x) = 0.005$.

Données. On rappelle que si $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$ alors $\mathbb{P}(Z \leq 1.55) = 0.9394$, $\mathbb{P}(Z \leq 0.78) = 0.7823$, $\mathbb{P}(Z \leq 2.57) = 0.995$.

Exercice 9. Vous êtes à la gare pour aller à une destination D. Vous avez le choix entre le train T1 et le train T2 qui desservent tous l'arrêt A de destination. On suppose que les durées des trajets (jusqu'à l'arrêt A) pour les trains T1 et T2 sont des variables aléatoires X et Y (respectivement) de lois Normale de moyennes respectives $\mu_1 = 30$ mn et $\mu_2 = 22$ mn et de variances respectives $\sigma_1 = 9$ et $\sigma_2 = 1$.

On suppose que les horaires de départ des trains T1 et T2 sont respectés et sont fixés à 7h 30mn pour le train T1 et à 7h 40mn pour le train T2.

Vous souhaitez prendre le train pour lequel vous avez le plus de chances d'arriver à l'arrêt A avant 8h.

1. Quelles sont vos chances d'arriver à l'arrêt A avant 8h avec le train T1.
2. Quelles sont vos chances d'arriver à l'arrêt A avant 8h avec le train T2.

3. Quel est le train que vous devez prendre.

Exercice 10. On découpe un gros projet en mini-projets par jour ouvré. On suppose que les nombres d'heures $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de travail sur le projet pour n jours ouvrés sont des variables aléatoires indépendantes de loi Normale d'espérance $\mu = 4$ et de variance $\sigma^2 = 4$. Pour que le projet soit rentable pour l'entreprise, le nombre total n d'heures de travail sur le projet ne doit pas dépasser 280 h.

On rappelle que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

1. A quoi correspond la quantité $X = X_1 + \ldots + X_n$ par rapport aux heures ouvrés de travail?
2. Etant donné que l'entreprise ne valide un projet que si elle est sûre à 98% que les contraintes sur le temps total de travail seront respectées, quel est le nombre maximal de jours ouvrés de travail à prévoir pour ce projet. C'est-à-dire, déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \leq 280) = 0.98$.
3. Qu'elle date de livraison (en jours ouvrés) à proposer au client si celle-ci doit être fixée 5 jours ouvrés après la durée maximale prévue pour le projet.
4. Quel est le temps moyen de travail par jours ouvrés que doit respecter l'entreprise si le client demande une livraison au bout de 50 jours ouvrés. On suppose qu'on a toujours $\sigma^2 = 4$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000000	0.5039894	0.5079783	0.5119665	0.5159534	0.5199388	0.5239222	0.5279032	0.5318814	0.5358564
0.10	0.5398278	0.5437953	0.5477584	0.5517168	0.5556700	0.5596177	0.5635595	0.5674949	0.5714237	0.5753454
0.20	0.5792597	0.5831662	0.5870644	0.5909541	0.5948349	0.5987063	0.6025681	0.6064199	0.6102612	0.6140919
0.30	0.6179114	0.6217195	0.6255158	0.6293000	0.6330717	0.6368307	0.6405764	0.6443088	0.6480273	0.6517317
0.40	0.6554217	0.6590970	0.6627573	0.6664022	0.6700314	0.6736448	0.6772419	0.6808225	0.6843863	0.6879331
0.50	0.6914625	0.6949743	0.6984682	0.7019440	0.7054015	0.7088403	0.7122603	0.7156612	0.7190427	0.7224047
0.60	0.7257469	0.7290691	0.7323711	0.7356527	0.7389137	0.7421539	0.7453731	0.7485711	0.7517478	0.7549029
0.70	0.7580363	0.7611479	0.7642375	0.7673049	0.7703500	0.7733726	0.7763727	0.7793501	0.7823046	0.7852361
0.80	0.7881446	0.7910299	0.7938919	0.7967306	0.7995458	0.8023375	0.8051055	0.8078498	0.8105703	0.8132671
0.90	0.8159399	0.8185887	0.8212136	0.8238145	0.8263912	0.8289439	0.8314724	0.8339768	0.8364569	0.8389129
1.00	0.8413447	0.8437524	0.8461358	0.848495?	0.8508300	0.8531409	0.8554277	0.8576903	0.8599289	0.8621434
1.10	0.8643339	0.8665005	0.8686431	0.8707619	0.8728568	0.8749281	0.8769756	0.8789995	0.8809999	0.8829768
1.20	0.8849303	0.8868606	0.8887676	0.8906514	0.8925123	0.8943502	0.8961653	0.8979577	0.8997274	0.9014747
1.30	0.9031995	0.9049021	0.9065825	0.9082409	0.9098773	0.9114920	0.9130850	0.9146565	0.9162067	0.9177356
1.40	0.9192433	0.9207302	0.9221962	0.9236415	0.9250663	0.9264707	0.9278550	0.9292191	0.9305634	0.9318879
1.50	0.9331928	0.9344783	0.9357445	0.9369916	0.9382198	0.9394292	0.9406201	0.9417924	0.9429466	0.9440826
1.60	0.9452007	0.9463011	0.9473839	0.9484493	0.9494974	0.9505285	0.9515428	0.9525403	0.9535213	0.9544860
1.70	0.9554345	0.9563671	0.9572838	0.9581849	0.9590705	0.9599408	0.9607961	0.9616364	0.9624620	0.9632730
1.80	0.9640697	0.9648521	0.9656205	0.9663750	0.9671159	0.9678432	0.9685572	0.9692581	0.9699460	0.9706210
1.90	0.9712834	0.9719334	0.9725711	0.9731966	0.9738102	0.9744119	0.9750021	0.9755808	0.9761482	0.9767045
2.00	0.9772499	0.9777844	0.9783083	0.9788217	0.9793248	0.9798178	0.9803007	0.9807738	0.9812372	0.9816911
2.10	0.9821356	0.9825708	0.9829970	0.9834142	0.9838226	0.9842224	0.9846137	0.9849966	0.9853713	0.9857379
2.20	0.9860966	0.9864474	0.9867906	0.9871263	0.9874545	0.9877755	0.9880894	0.9883962	0.9886962	0.9889893
2.30	0.9892759	0.9895559	0.9898296	0.9900969	0.9903581	0.9906133	0.9908625	0.9911060	0.9913437	0.9915758
2.40	0.9918025	0.9920237	0.9922397	0.9924506	0.9926564	0.9928572	0.9930531	0.9932443	0.9934309	0.9936128
2.50	0.9937903	0.9939634	0.9941323	0.9942969	0.9944574	0.9946139	0.9947664	0.9949151	0.9950600	0.9952012
2.60	0.9953388	0.9954729	0.9956035	0.9957308	0.9958547	0.9959754	0.9960930	0.9962074	0.9963189	0.9964274
2.70	0.9965330	0.9966358	0.9967359	0.9968333	0.9969280	0.9970202	0.9971099	0.9971972	0.9972821	0.9973646
2.80	0.9974449	0.9975229	0.9975988	0.9976726	0.9977443	0.9978140	0.9978818	0.9979476	0.9980116	0.9980738
2.90	0.9981342	0.9981929	0.9982498	0.9983052	0.9983589	0.9984111	0.9984618	0.9985110	0.9985588	0.9986051
3.00	0.9986501	0.9986938	0.9987361	0.9987772	0.9988171	0.9988558	0.9988933	0.9989297	0.9989650	0.9989992
3.10	0.9990324	0.9990646	0.9990957	0.9991260	0.9991553	0.9991836	0.9992112	0.9992378	0.9992636	0.9992886
3.20	0.9993129	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994024	0.9994230	0.9994429	0.9994623	0.9994810	0.9994991
3.30	0.9995166	0.9995335	0.9995499	0.9995658	0.9995811	0.9995959	0.9996103	0.9996242	0.9996376	0.9996505
3.40	0.9996631	0.9996752	0.9996869	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997398	0.9997493	0.9997585
3.50	0.9997674	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998074	0.9998146	0.9998215	0.9998282	0.9998347
3.60	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998637	0.9998689	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998879
3.70	0.9998922	0.9998964	0.9999004	0.9999043	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3.80	0.9999277	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3.90	0.9999519	0.9999539	0.9999557	0.9999575	0.9999593	0.9999609	0.9999625	0.9999641	0.9999655	0.9999670

Table 1: Fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite: $x \mapsto F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$, pour x allant de 0 à 3.99 par pas de 0.01.