Questions de cours possibles :

- inégalité de Cauchy-Schwarz
- déterminant de Vandermonde
- sur $\mathbb{R}^3$, donner une base orthonormée de $\mathrm{Vect}((1,1,2),(2,-1,-3))$

Soit $A = (1-\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de A.

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$, calculer la déterminant de $\left(a_{\min(i,j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

Soient $a, b, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b & \dots & b \\ a & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & \lambda_n \end{pmatrix}$

Soit $\Delta(x) = \det(A + xJ)$ où $J = (1)_{1\leq i,j\leq n}$
Calculer le déterminant de A (hint : on pourra exploiter Δ ...)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $P(t) = \det(tA + B)$
Montrer que $\deg P \leq \mathrm{rg}\ A$

Calculer le déterminant de $\left(\binom{i+j}{j}\right)_{0\leq i,j\leq n}$

Soient $f_1,\dots,f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $(f_1,\dots,f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\det\left((f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}\right) \neq 0$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall i, \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1$.
Montrer que $|\det A| \leq 1$

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $CD = DC$
(1) En supposant D inversible, calculer $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$
(2) Montrer que $P(t) = \det(D - tI_n)$ est un polynôme.
(3) En déduire $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = 1$ ou -1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, A_{ii} = 0$ et $\forall i \neq j, A_{ij} = 1$ ou -1.
Montrer que A est inversible

Montrer que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$