Questions de cours possibles :
— inégalité de Cauchy-Schwarz
— H hyperplan ssi $\exists a \neq 0, H = \{a\}^\perp$ (ou f forme linéaire ssi $\exists a, \forall x, f(x) = \langle a, x\rangle$)
— sur $\mathbb{R}^3$, donner une base orthonormée de $\text{Vect}((1,1,2),(2,-1,-3))$

(1) Montrer que $N(A) = \sqrt{Tr({}^tAA)}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (hint : on pourra s'intéresser à $\langle A, B\rangle = \text{tr}({}^tAB)$ ...)
(2) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |Tr(A)| \leq \sqrt{n}N(A)$
(3) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall O \in O_n(\mathbb{R}), N(AO) = N(OA) = N(A)$
(4) Montrer que $\forall A, B \in M_n(R), N(AB) \leq N(A)N(B)$

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, montrer que $\left(\sum\limits_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\sum\limits_{k=1}^n x_k^2$

Soit $(E, \langle,\rangle)$ espace euclidien de dimension n, $\mathcal{F}$ sev de $\mathcal{L}(E)$, φ une forme linéaire sur F
(1) On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $\forall f \in \mathcal{F}\backslash\{0\}, f(x) \neq 0$.
Montrer que $\exists y \in E, \forall f \in \mathcal{F}, \varphi(f) = \langle f(x), y\rangle$ (hint : considérer $(f|g) = \langle f(x), g(x)\rangle$ ...)
(2) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que $\exists y_1, \ldots, y_n, \forall f \in \mathcal{F}, \varphi(f) = \sum\limits_{k=1}^n \langle f(e_k), y_k\rangle$

Soit E eucidien
(1) Soient $x, y \in E$, montrer que $x \perp y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} ||x + \lambda y| \geq ||x||$
(2) Soit p projecteur de E. Montrer que p projecteur orthogonal ssi $\forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$

Soit E euclidien, $N_1, \ldots, N_k$ sev de E, p_i le projecteur orthogonal sur N_i $(1 \leq i \leq k)$. Soit $q = p_k \circ \ldots \circ p_1$ et $N = \bigcap\limits_{i=1}^k N_i$
(1) Montrer que $\forall x \in E, x \in N \Leftrightarrow ||q(x)|| = ||x||$
(2) En déduire que Ker $(q - Id) = N$

Soit E euclidien de dimension n. Soient $v_1, \ldots, v_n \in E$ tels que $\forall i, ||v_i|| = 1$ et $\forall i \neq j, ||v_i - v_j|| = 1$
Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre

Soit E euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E, x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$
Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, ||f(x)|| = \lambda ||x||$

Soit E euclidien, F, G des sev de E.
Exprimer $(F \cup G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$

Soit E euclidien, p projecteur de E tel que $\forall x \in E, \langle p(x), x\rangle \geq 0$
Montrer que p est un projecteur orthogonal

Soit $n \geq 3$
(1) Montrer que $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
(2) Calculer $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \left(t^3 - \left(at^2 + bt + c\right)\right)^2 dt$