Donner la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^3-2X-3}{(X-1)^2(X-2)^2}$ sur $\mathbb{C}$

Donner la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$ sur $\mathbb{C}$

Donner la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ sur $\mathbb{C}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $1 < \deg P < n$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(\omega^k) \neq 0$ (avec $\omega = e^{2i\pi/n}$).
Donner la décomposition en éléments simples de $F = \frac{P}{X^n-1}$ sur $\mathbb{C}$

Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ telle que $P \wedge Q = 1$ et $F' = 1/X$
(1) Montrer que $X|Q$
(2) Montrer que $\forall n \geq 1, X^n|Q \Rightarrow X^n|Q'$
(3) En déduire qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F' = 1/X$

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Déterminer les racines et les pôles de $\frac{X^p-1}{X^q-1}$

Calculer la limite de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Soient $0 < a_1 < \ldots < a_n$, et $P = (X-a_1)\ldots(X-a_n)$ (avec $n \geq 1$).
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k P'(a_k)} = -\frac{1}{P(0)}$ (hint : calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$)

(1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, donner la décomposition en éléments simples de P'/P sur $\mathbb{C}$ (en fonction des racines de P et de leur multiplicité)
(2) En déduire l'ensemble des $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$

Soit $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{1}{x^3-2x^2+x}$. Trouver une primitive F de f sur $]1, +\infty[$, puis donner un équivalent de $F(x)$ quand $x \to +\infty$

Soit $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{2x^3+x+1}{(x-1)^4}$. Trouver une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

(1) Soit $(v_n)_n$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$
(2) On définit $(u_n)_n$ par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Donner un équivalent de u_n (hint : on pourra s'intéresser à u_n^2)
(3) On définit $(u_n)_n$ par :$u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Donner un équivalent de u_n (hint : on pourra s'intéresser à e^{u_n})

Soit $P_n = X^n + X^{n-1} + 2X - 1$ $(n \geq 2)$
(1) Montrer que $\forall n \geq 2, \exists! x_n > 0, P_n(x_n) = x_n$
(2) Montrer que $(x_n)_n$ est croissante et converge vers 1.

Soit $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$. Calculer $l = \lim u_n$, puis donner un équivalent de $u_n - l$

Soit $(u_n)_n$ définie par : $u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = 2,\ u_4 = u_5 = u_6 = 3,\ \ldots$. Donner un équivalent de u_n.

Soient $a, b > 1$, trouver la limite de $\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

(1) Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ $(n \in N)$
(2) Trouver une relation entre x_n et $\arctan x_n$
(3) En déduire le développement limité de x_n à deux termes (en fonction de n)
(4) En déduire le développement limité de x_n à quatre termes.