Questions de cours possibles :

- inverser $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- CNS pour qu'une matrice diagonale (ou triangulaire) soit inversible
- dimension de $M_n(K)$
- calculer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 9 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

Soit $n \geq 2$, soit $A = (1 - \delta_{i,j})_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.
Calculer A^2, puis en déduire que A inversible et calculer A^{-1}

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^k pour $k \geq 0$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $A = \left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n+1}$ Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
(hint : on pourra interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X] \dots$)

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda I_n$
(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibe, $AB = BA$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda I_n$

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
(1) Trouver $P \in \mathbb{R}_2[X] \backslash \{0\}$ tel que $P(A) = 0$
(2) Pour $n \geq 1$, trouver le reste de la division euclidienne de X^n par P.
(3) Calculer A^n

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(R)$ une matrice triangulaire supérieure à diagonalle nulle. Montrer que $A^n = 0$
(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Calculer A^k pour $k \geq 0$

Soit $n \geq 2$,soit $\omega = e^{2i\pi/n}$, on pose $A = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (hint : calculer $A\overline{A}$ ...)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(1) Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
(2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(X) = \mathrm{tr}\ (AX)$

Quelles sont les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = I_n$?