Questions de cours possibles :
— absolue convergence $\Rightarrow$ convergence
— série de Riemann
— critère de D'Alembert

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$, et soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n\alpha_{n-1}$ (où $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 > 0$).
(1) Montrer que : $(\alpha_n)_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
(2) Montrer que : $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \to 1$
(3) Montrer la réciproque de (1) (hint : on pourra s'intéresser à $\ln \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante qui tend vers 0.
(1) Montrer que : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow (nu_n)_n$ converge vers 0
(2) La réciproque est-elle vraie ?

(1) Soit $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (hint : on pourra étudier $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n} \ldots$)
(2) Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right)$
La série est-elle convergente ? Quelle est sa limite (si elle existe ...) ?

La série de terme générale $\sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right)$ est-elle convergente ? Absolument convergente ?

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite réelle.
(1) Supposons que $\sum a_n$ est semi-convergente, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ a_n \geq 0\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ u_n < 0\}$
(a) Montrer que A et B sont infinis
Soit σ définie par récurrence :
— $\sigma(0) = 0$
— $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n+1) = \begin{cases} \min A \backslash \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\} & \text{si } \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \alpha \\ \min B \backslash \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\} & \text{si } \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} > \alpha \end{cases}$
(b) Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$
(c) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$ (hint : montrer d'abord que $u_{\sigma(n)} \to 0$)
(2) Supposons que $\sum a_n$ est absolument convergente
(a) Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), \sum a_{\sigma(n)}$ converge absolument
(b) Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$

Soit $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$.
(1) Montrer que $\ln u_n$ converge
(2) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (hint : $\forall k \geq 1, \frac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt \quad \ldots$)

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < \infty\}$.
(0) Montrer que E est un espace vectoriel
(1) Montrer que $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur E.
(2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge.
Montrer que la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$