questions de cours possibles :

— développement limité de arctan en 0 à l'ordre n.
— développement limité de tan en 0 à l'ordre 4
— un des exos simples ...

(1) Montrer que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$
(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
(3) En déduire le développement asymptotique de H_n à deux termes.

Soit $f : [0, b] \to \mathbb{R}_+$ avec $b > 0$ telle que $f(x) = x - ax^\alpha + \underset{x \to 0}{o}(x^\alpha)$ où $a > 0$ et $\alpha > 1$.
(1) Montrer que $\exists \eta > 0, \forall x \in [0, \eta[, f(x) \leq x$
(2) Trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)^\beta - x^\beta$ admet une limite finie en 0.
(3) Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in [0, \eta[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Trouver un équivalent de u_n.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $v_n = n\left(u_n - \int_a^b f(t)dt\right)$
(1) Étudier la limite de v_n (hint : on pourra introduire une primitive de f)
(2) En supposant f de classe $\mathcal{C}^2$, trouver le développement limité de u_n à trois termes.

Soient $0 < a < b$ et, pour $\varepsilon > 0$, on pose $P_\varepsilon = (X-a)(b-X) + \varepsilon X^3$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), x_3(\varepsilon)$ les racines de P_ε. On admet que $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ sont réelles. On suppose $x_1(\varepsilon) \leq x_2(\varepsilon) \leq x_3(\varepsilon)$, et on admet que x_1, x_2, x_3 sont de classe $\mathcal{C}^2$.
(1) Montrer que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$
(2) Donner les développements asymptotiques de x_1, x_2 et x_3 en 0, arrêtés en $O\left(\varepsilon^2\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$
(1) Montrer que $\forall n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
(2) Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$
(3) En déduire un équivalent de I_n (hint : regarder la suite $(nI_nI_{n-1})_n$)

Donner le développement limité de $(1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 en 0.

Donner le développement limité de $\sqrt{3 + \cos x}$ à l'ordre 3 en 0.

Donner un équivalent de $2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

Soient $a, b > 1$, trouver la limite de $\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

(1) Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[\quad (n \in N)$
(2) Trouver une relation entre x_n et $\arctan x_n$
(3) En déduire le développement limité de x_n à deux termes (en fonction de n)
(4) En déduire le développement limité de x_n à quatre termes.

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit un $o(x^n)$ en 0 avec n maximal

Soit $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$. Calculer $l = \lim u_n$, puis donner un équivalent de $u_n - l$

Soit $(u_n)_n$ définie par : $u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = 2,\ u_4 = u_5 = u_6 = 3,\ \dots$. Donner un équivalent de u_n.

(1) Soit $(v_n)_n$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$
(2) On définit $(u_n)_n$ par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Donner un équivalent de u_n (hint : on pourra s'intéresser à u_n^2)
(3) On définit $(u_n)_n$ par :$u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Donner un équivalent de u_n (hint : on pourra s'intéresser à e^{u_n})

Soit $P_n = X^n + X^{n-1} + 2X - 1$ $(n \geq 2)$
(1) Montrer que $\forall n \geq 2, \exists! x_n > 0, P_n(x_n) = x_n$
(2) Montrer que $(x_n)_n$ est croissante et converge vers 1.