

questions de cours possibles :

- Si  $f$  dérivable sur  $I$  tq  $x \in I$  min local de  $f$ , alors  $f'(x) = 0$
- Les inégalités larges se conservent par passage à la limite.
- Le théorème des accroissements finis.
- Le théorème de Rolle.
- Dérivée de arctan.
- $f' \geq 0$  sur  $[a, b]$  ssi  $f$  croissante sur  $[a, b]$
- polynôme de Taylor de sin

Soit  $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(1/x)$ . Existe-t-il un prolongement de  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  ?

Si oui, le prolongement est-il dérivable? de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

Même question pour  $f(x) = x \sin(1/x)$ , et pour  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f'(b)(f(b) - f(a)) < 0$ . Montrer que  $f'$  s'annule sur  $]a, b[$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

(1) Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, \left| \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \right| \leq \varepsilon$

(2) En déduire que  $f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $I$ , soit  $a$  un réel dans l'intérieur de  $I$ . Supposons que  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) \neq 0$ . Montrer que  $a$  est un extremum local de  $f$ . Donner un contre-exemple si  $f''(a) = 0$ .

Soit  $f$  dérivable en  $a \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a+3h) - f^2(a-h)}{h}$

Soit  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ .

Montrer que,  $f_n(x) = 0$  possède une unique solution si  $n$  est impair, et aucune solution si  $n$  pair.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  non constant dont toutes les racines sont réelles. Montrer que  $P'$  n'a que des racines réelles.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur l'intervalle  $I$ , soient  $a, b \in I$  tels que  $a < b$ .

On pose, pour  $t \in [a, b]$ ,  $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} & \text{si } t > a \\ f'(a) & \text{si } t = a \end{cases}$  et  $\psi(t) = \begin{cases} \frac{f(b) - f(t)}{b - t} & \text{si } t < b \\ f'(b) & \text{si } t = b \end{cases}$

(1) Montrer que  $\varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$  est un intervalle.

(2) En déduire que  $f'$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $f(0) \geq 0$  et  $f'(0) > 0$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

(1) Montrer qu'il existe  $x_1 > 0$  tel que  $f'(x_1) = 0$

(2) Montrer qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}_+^*$  strictement croissante telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x_n) = 0$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall t > 0, f(tx) = tf(x)$ . Montrer que  $f$  est linéaire.

(1) Montrer que  $\forall x \in [0, \pi/2], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

(2) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$  (hint : majorer  $|\sin x - x| \dots$ )

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P$  admet une racine réelle. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$ . Montrer que  $f = 0$ .

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , et  $a \in \mathbb{R}$ .

(1) Calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h}$

(2) Calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$