Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, soient F et G des sous-espaces de E

(1) Montrer que : $F \cup G$ est un sev de $E \Longleftrightarrow F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$

(2) On suppose que E est de dimension finie, et que F et G sont de même dimension r.

Montrer que F et G ont un supplémentaire commun. Faire une récurrence descendante sur r. Pour l'hérédité, distinguez les cas $F \cup G$ sev ou non.

Exercice 2. (1) Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, on suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ (où $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$)

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie

(1) soit $u \in \mathcal{L}(E)$ inversible. Montrer que $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

(2) soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} u$ dans E. Montrer que $u_{|F} \in GL(F, \mathrm{Im} u)$

(3) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\exists f \in \mathcal{L}(E), v = f \circ u \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ u \subseteq \mathrm{Ker}\ v$ (on peut commencer par le cas $u \in GL(E)$...)

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u$. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\ u$ dans E.

(a) Montrer que : $\forall x \in E, \exists! (y, z) \in S \times S, x = y + u(z)$.

On pose $v(x) = z$ et $w(x) = y$

(b) Montrer que v et w sont linéaires, et calculer $u \circ v + v \circ u$ et $u \circ w + w \circ u$

(2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie la relation de 1)b). A-t-on toujours $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u$?

(3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie la relation de 1)b). A-t-on toujours $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u$?

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que LASSE :

(i) $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^2$

(ii) $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Im}\ u^2$

Puis montrer que (i) et (ii) sont équivalents à (iii)

(iii) $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus \mathrm{Im}\ u$

Exercice 6. Soit E l'espace des fonctions de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{f \in E \ : \ f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$

Montrer que $E = F \oplus G$

Exercice 7. Soit $n \geq 2$, soit $A = (1 - \delta_{i,j})_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Exprimer A^2 en fonction de A et I, puis en déduire que A inversible et calculer A^{-1}

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^k pour $k \geq 0$

Exercice 9. (1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda I_n$ (prendre $B = E_{i,j}$...)

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibe, $AB = BA$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda I_n$

Exercice 10. (1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure à diagonalle nulle. Montrer que $A^n = 0$

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Calculer A^k pour $k \geq 0$

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 12. Soit $A = (1 - \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de A. (hint $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ et $M_1 \leftarrow L_1 - L_n$)

Exercice 13. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, calculer la déterminant de $\left(a_{\min(i,j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Exercice 14. Soient $a, b, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b & \dots & b \\ a & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & \lambda_n \end{pmatrix}$

Soit $\Delta(x) = \det(A + xJ)$ où $J = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$
Calculer le déterminant de A (hint : on pourra exploiter Δ ...)

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = 1$ ou -1

Exercice 16. Montrer que $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 17. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, montrer que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$

Exercice 18. Soit E eucidien
Soient $x, y \in E$, montrer que $x \perp y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} ||x + \lambda y| \geq ||x||$

Exercice 19. Soit E euclidien de dimension n. Soient $v_1, \dots, v_n \in E$ tels que $\forall i, ||v_i|| = 1$ et $\forall i \neq j, ||v_i - v_j|| = 1$
Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre (hint : que dire de $\langle v_i, v_j \rangle$ si $i \neq j$...)

Exercice 20. Soit E euclidien, F, G des sev de E.
Exprimer $(F \cup G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$

Correction de l'exercice 1. (1) L'implication de droite à gauche est évidente. Prouvons l'autre par l'absurde : supposons qu'il existe $x \in G \backslash F$ et $y \in F \backslash G$. Alors si $G \cup F$ est un sev, on sait que $x + y \in G \cup F$, par exemple $x + y \in G$, mais alors $y = x + y - x \in G$, ce qui est absurde par définition de y.

(2) Si $r = n$, on a $G = F = E$, il n'y a rien à prouver. Supposons que tout sev G', F' de dimension $r+1$ admettent un supplémentaire commun (c'est l'hypothèse de récurrence), et montrons ce résultat pour les sev G, F de dimension r. Si FG ou $G \subseteq F$, alors $G = F$, et le résultat est trivial. Sinon, on sait que $G \cup F$ n'est pas un sev, et en particuler $F \cup G \neq E$. Soit alors $a \in E \backslash G \cup F$, par hypothèse de récurrence, il existe un sev H tel que $E = (F \oplus \mathrm{Vect}(a)) \oplus H = (G \oplus \mathrm{Vect}(a)) \oplus H$. On a alors $E = F \oplus (H \oplus \mathrm{Vect}(a)) = G \oplus (H \oplus \mathrm{Vect}(a))$

Correction de l'exercice 2. (1) Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Soit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0$. On montre par récurrence sur k que $\lambda_k = 0$. Pour voir que $\lambda_0 = 0$, il suffit d'appliquer f^{n-1} à l'égalité précédente...

(2) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une famille libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de u dans la base $(x, u(x), , u^{n-1}(x))$ est la matrice B.

Correction de l'exercice 3. (1) $u^{-1}(\lambda x + y) - \lambda u^{-1}(x) - u^{-1}(y) \in \mathrm{Ker} u = \{0\}$. Cela prouve que u^{-1} est linéaire.

(2) $u_{|F} : F \to \mathrm{Im} u$ est surjective par définition, et $\dim F = \dim \mathrm{Im} u$ par le théorème du rang, on sait donc que $u_{|F} \in GL(F, \mathrm{Im} u)$

(3) L'implication de gauche à droite est évidente. Pour l'autre, si $u \in GL(E)$, il suffit de poser $f = v \circ u^{-1}$. Dans le cas général où $u \in \mathcal{L}(E)$, il suffit de considérer F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} u$ dans E, et de poser $f(x) = v \circ u_{|F}^{-1}(x)$ si $x \in F$, et $f(x) = 0$ si $x \in$ Ker f

Correction de l'exercice 4. ...

Correction de l'exercice 5. $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Il est toujours vrai que $\mathrm{Ker} u \subseteq \mathrm{Ker} u^2$ et que $\mathrm{Im} u^2 \subseteq \mathrm{Im} u$, il suffit alors d'appliquer le théorème du rang.

Correction de l'exercice 6. Montrons d'abord que F et $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ sont en somme directe : soit donc $f \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $0 = f + \lambda \cos + \mu \sin$. En particulier, on a $0 = f(0) + \lambda = f(0) + \mu = f(0) - \lambda$, ce qui impose $\lambda = 0$, puis $f(0) = 0$, puis $\mu = 0$, et enfin $f = 0$.

Montrons maintenant que $E = F + \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. Par analyse-synthèse, on écrit $g = f + \lambda \cos + \mu \sin \in E$ avec $f \in F$. Ces fonctions doivent vérifier $f(0) = g(0) - \lambda = g(\pi/2) - \mu = g(\pi) + \lambda$. Cela impose d'avoir $\lambda = g(0) - f(0) = f(0) - g(\pi)$. Il faut donc poser $f(0) = (g(0) + g(\pi))/2$, $\lambda = ((g(0) - g(\pi))/2$, $\mu = g(\pi/2) - ((g(0) + g(\pi))/2)$. En posant $f = g - \lambda \cos - \mu \sin$, il faut alors vérifier que $f \in F$, c'est-à-dire $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$...

Correction de l'exercice 7. on trouve $A^2 = (n-2)A + (n-1)I$, d'où $A(A - (n-2)I) = (n-1)I$, donc $A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A - (n-2)I)$

Correction de l'exercice 8. par récurrence sur k, on montre que A^k s'écrit

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & u_k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $(u_k)_k$ vérifie $u_{k+1} = u_k + k + 1$. Donc avec une récurrence immédiate, on voit que $u_k = \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$.

Correction de l'exercice 9. (1) Pour tout i, j, k, l, on a $AE_{i,j}[k, l] = E_{i,j}A[k, l]$, ie $a_{ki}\delta_{jl} = a_{jl}\delta_{ik}$. En particulier, en prenant $l = j$ et $k = i$, on trouve $a_{ii} = a_{jj}$, et en prenant $i \neq j$ et $k = j = l$, on a $a_{ji} = 0$. Donc en notant λ la valeur commune des a_{ii}, on obtient le résusltat.

(2) Il suffit d'utiliser l'égalité avec $B = I + E_{i,j}$...

Correction de l'exercice 10. (1) Soit u l'endomorphisme de A dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. On sait que $u(e_1) = 0$ et pour tout $k \geq 2, u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1})$. Par récurrence, on montre que pour tout j, $u^j(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_l)_{1 \leq l \leq k-j}$. Donc $u^n = 0$

(2) On écrit $A = D + N$ où $D = 3I$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme D commute avec N, on a $A^k = \sum_{i=0}^k C_k^i D^{k-i} N^i =$

$D^k + kD^{k-1}N + \frac{k(k-1)}{2}D^{k-2}N^2$, puisque $N^3 = 0$. Il suffit alors de remarquer que $D^i = 3^i I$, et de calculer N^2...

Correction de l'exercice 11. (1) Soit u un endomorphisme de A dans une base (e_1, e_2, e_3). On cherche une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ tel que la matrice de u dans cette base soit D. On cherche ε_1 de la forme $\varepsilon_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$, comme on doit avoir $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, cela impose (après calculs) que $b = -a$ et $c = -2a$, on peut donc prendre $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$, puis faire de même pour trouver ε_2 et ε_3...

(2) il suffit de calculer la matrice P de changement de base de (e_1, e_2, e_3) vers $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, on a alors $A^n = PD^nP^{-1}$...

Correction de l'exercice 12. en développant, on trouve $\Delta_n = -2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, on prouve alors par récurrence que $\Delta_n = (-1)^{n-1}(n-1)$

Correction de l'exercice 13. On pose $\Delta_n(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant à calculer. Avec $L_i \leftarrow L_i - L_1$ $(i \geq 2)$, on trouve $\Delta_n(a_1, \ldots, a_n) = a_1\Delta_{n-1}(a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1)$. On montre alors par récurrence que $\Delta_n(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)$

Correction de l'exercice 14. Avec $L_i \leftarrow L_i - L_1$ $(i \geq 2)$, on voit que Δ est un polynome de degré ≤ 1. On connait $\Delta(-a) = c$ et $\Delta(-b) = d$, on a alors $\Delta(x) = c\frac{x+b}{b-a} + d\frac{x+a}{a-b}$. On connait alors $\Delta(0)$.

Correction de l'exercice 15. Si A est inversible dans $mathcalM_n(\mathbb{Z})$, alors $\det A^{-1} = 1/(\det A) \in \mathbb{Z}$, donc $\det A = 1$ ou -1.

Réciproquement si $\det A = 1$ ou -1, alors A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}((comA)^t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

Correction de l'exercice 16. OK

Correction de l'exercice 17. Cauchy-Schwarz...

Correction de l'exercice 18. (1) Dans le sens direct, $||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + \lambda^2||y||^2$.

Pour le sens indirect, on sait que pour tout λ, on a $\lambda^2||y||^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle \geq 0$. Cela impose pour tout $\lambda < 0$, $\lambda||y||^2 + 2\langle x, y\rangle \leq 0$, ie $\langle x, y\rangle \leq -\frac{\lambda}{2}||y||^2$, il suffit alors de faire tendre λ vers 0.

Correction de l'exercice 19. si $i \neq j$, alors $1 = ||v_i - v_j||^2 = 2 - 2\langle v_i, v_j\rangle$, d'où $\langle v_i, v_j\rangle = 1/2$. Si on considère des λ_i tels que $\sum i = 1^n \lambda_i v_i = 0$, alors on a pour tout j, $\sum_i \lambda_i\langle v_i, v_j\rangle = 0$, donc $\lambda_j + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^n \lambda_i = 0$. On en déduit que $\lambda_j = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$. On sait alors que les λ_j sont tous égaux à un certain λ qui vérifie $n\lambda = \lambda$, cela impose $\lambda = 0$ dès que $n \geq 2$ (et l'exercice est évident pour $n = 1$...)

Correction de l'exercice 20. $(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, c'est évident, il suffit de vérifier la double inclusion...