
TD 6 : Variables aléatoires discrètes (suite et fin)

Exercice 1.

Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 2, c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}.$$

- Calculer la fonction génératrice de N .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T = \sum_{k=1}^n N_k$ où les N_k sont indépendants et de même loi que N . Calculer la fonction génératrice de T .
- En déduire son espérance et sa variance.
- Quelle est la loi de T ? En déduire $P(T \leq 3)$ lorsque $n = 4$.

Exercice 2.

Le nombre d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre λ . La probabilité qu'un oeuf se développe est p . On suppose que les oeufs se développent indépendamment les uns des autres.

- Quelle est la loi de probabilité du nombre Y_1 de descendants d'un insecte donné?
- Quelle est la loi de probabilité du nombre Y_N de descendants dans la N ième génération d'un insecte donné

Exercice 3.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant une loi géométrique de paramètre p . On note $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

- Donner l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$.
- Exprimer $X_1 + X_2$ et $|X_1 - X_2|$ en fonction de T et Z .
- Démontrer que $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{p}{2-p}$.

Exercice 4.

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets; les candidats tirent au sort 3 sujets et choisissent l'un d'eux pour le traiter. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

- Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité.
- Quelle est son espérance et sa variance?
- Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
 - les trois sujets tirés,
 - exactement deux sujets sur les trois sujets,
 - aucun des trois sujets.