

TD 9 : Couples de variables aléatoires

Exercice 1.

La loi de probabilité du couple de variables aléatoires (X, Y) est donnée par

(X, Y)	0	1	2	3
0	2/48	6/48	3/48	1/48
2	4/48	12/48	6/48	2/48
4	2/48	6/48	3/48	1/48

- Donner les lois marginales du couples (X, Y) .
- X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur A . Pour chacun des cas suivants donner les lois marginales du couples et étudier l'indépendance de X et Y .

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2x \text{ et } y \leq 6 - x\}$.
- $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \geq y + 1/2 \text{ ou } x \leq y \leq x + 1/2\}$.
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 3.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoire admettant comme densité la fonction suivante :

$$f(x, y) = \frac{1}{4} (2x + y) \mathbb{1}_{[0,1] \times [0,2]}(x, y).$$

- Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \in [0, 1]), \quad \mathbb{P}(Y \leq 1), \quad \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2}, Y \geq 1\right), \quad \mathbb{P}(X + Y \leq 1).$$

- Donner les lois marginales du couples (X, Y) .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une fonction de densité f . Pour chacun des cas suivants calculer les lois marginales du couples (X, Y) et étudier l'indépendance de X et Y .

- $f(x, y) = xe^{-x(1+y)} \mathbb{1}_{[0,+\infty[2]}(x, y)$.
- $f(x, y) = 60xy^2$ pour $x, y \geq 0$ et $x + y \leq 1$ et $f(x, y) = 0$ sinon.